เรขาคณิตพร่องจำนวน*

ยงค์วิมล เลณบุรี
ราชบัณฑิต สำนักวิทยาศาสตร์
ราชบัณฑิตยสถาน

โครงสร้างและวัตถุหลายสิ่งที่พบได้รอบตัวของเรามีสมบัติพิเศษประการหนึ่งเรียกว่า มีเรขาคณิตพร่องจำนวน (แฟร็กทัล) ซึ่งมีรากศัพท์มาจากการที่โครงสร้างเหล่านี้ให้มิติมีค่าไม่เป็นจำนวนเต็ม. บทความนี้จะกล่าวถึงนิยามต่าง ๆ ของคำว่า มิติ และให้ตัวอย่างโครงสร้างและวัตถุที่น่าสนใจในธรรมชาติ ที่มีเรขาคณิตพร่องจำนวน.

คำสำคัญ : **เรขาคณิตพร่องจำนวน**

คำนำ

ในช่วงทศวรรษที่ผ่านไป นักวิทยาศาสตร์ในสาขาวิชาต่างๆ ได้ค้นพบว่า โครงสร้างที่เกิดขึ้นในการทดลองต่างๆ มีลักษณะพิเศษทางเรขาคณิตบางประการซึ่งซับซ้อน. Mandelbrot[๑] เป็นคนแรกที่ชี้นำความสนใจมาสู่สมบัติเชิงเรขาคณิตเฉพาะของสิ่งของ เช่น กิ่งก้านของต้นไม้ ชายฝั่งของทวีป หรือพื้นผิวของก้อนเมฆ. เขาตั้งชื่อรูปร่างซับซ้อนเหล่านี้ว่า เรขาคณิตพร่องจำนวน (แฟร็กทัล) ซึ่งบ่งถึงการที่สิ่งต่าง ๆเหล่านี้มีมิติที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม (non-integer).

งานวิจัยได้นำไปสู่การค้นพบสิ่งที่มีเรขาคณิตพร่องจำนวนอีกเป็นจำนวนมาก ซึ่งรวมไปถึงการรวมตัวเป็นกลุ่มก้อนของวัตถุขนาดจุลทรรศน์ไปจนถึงกลุ่มดาวในทางช้างเผือก. สาขาสำคัญที่ศึกษาเกี่ยวกับเรขาคณิตพร่องจำนวนคือ ปรากฏการณ์ก่อตัวซึ่งมีลักษณะไม่สมดุลอย่างมาก ตัวอย่างเช่น การแข็งตัวเป็นกิ่งก้านในตัวกลางที่เย็นไม่เพียงพอ, การสะสม (ตกตะกอน) เชิงไฟฟ้าของไอออนบนขั้วไฟฟ้า หรือการคืบตัวของของเหลวหนืดที่ถูกฉีดเข้าสู่ของเหลวหนืดอีกชนิดหนึ่ง.

เหตุผลที่มีความตื่นตัวในการพัฒนาการวิจัยด้านการเจริญพร่องจำนวน (fractal growth) อย่างรวดเร็วในไม่กี่ปีที่ผ่านมา ก็เนื่องจากปรากฏ-การณ์ดังกล่าวเกี่ยวข้องอย่างใกล้ชิดกับกระบวนการที่นำไปประยุกต์ใช้ได้จริง เช่น

- เนื้อในของโลหะผสมที่เป็นโครงสร้างกิ่งก้านที่เกิดขึ้นระหว่างการแข็งตัว ทำให้โลหะผสมนั้นมีสมบัติทางกลศาสตร์แตกต่างออกไป
- ในการขุดน้ำมัน (secondary oil recovery) โดยวิธีฉีดอัดน้ำเข้าไปในพื้นดินผ่านทางบ่อหนึ่ง เพื่อผลักดันน้ำมันให้ไหลออกทางบ่อใกล้เคียง. ประสิทธิภาพของวิธีการดังกล่าวถูกอิทธิพลของโครงสร้างพร่องจำนวนของ viscous finger ตรงผิวสัมผัสระหว่างน้ำกับน้ำมัน.

สมบัติของชิ้นส่วน

วัตถุที่มีเรขาคณิตพร่องจำนวนนั้น มีลักษณะร่วม ดังนี้

- ลักษณะคล้ายตัวเอง (self-similar) ซึ่งไม่ขึ้นกับมาตราส่วนที่แตกต่าง (scale invariant). นั่นคือ ถ้าตัดเอาส่วนหนึ่งออกมาขยายดู สิ่งที่ได้มาจะคล้ายวัตถุเดิม เช่น
  - ลักษณะชายฝั่งของประเทศอังกฤษ
  - ลายกิ่งในใบเฟิร์น

**บรรยายในการประชุมสำนักวิทยาศาสตร์ ราชบัณฑิตยสถาน เมื่อวันที่ ๑๐ ตุลาคม พ.ศ. ๒๕๔๔*

● ปริมาตร V(R) ของบริเวณที่มีขอบเขตตามมาตราส่วนที่กำหนด จะแปรผันตามขนาด เชิงเส้นรัศมี (R) ของวัตถุนั้น ตามสูตร

$$V(R) \sim R^D$$

โดยที่ D ไม่เป็นจำนวนเต็ม (non-integer) ซึ่งถูกเรียกว่า มิติพร่องจำนวน (fractal dimension) ของวัตถุนั้น.

ตัวอย่างของการหามิติ

ให้พิจารณา triadic Cantor set ดังในรูป

นิยามของมิติ

กำหนดให้ d = dimension ของปริภูมิที่บรรจุวัตถุที่ต้องการหามิติอยู่ เช่น ถ้าต้องการหามิติ D ของ Cantor set ซึ่งวาดอยู่ในระนาบ ก็จะได้ d = ๒ เนื่องจากระนาบมีมิติ = ๒

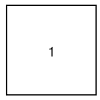
ในเส้นตรง, คำว่า "box มิติ ๑" จะหมายถึง *ช่วงย่อย*

ในระนาบ, คำว่า "box มิติ ๒" จะหมายถึง *สี่เหลี่ยมจัตุรัส*

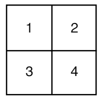
ในปริภูมิ ๓ มิติ, "box มิติ ๓" จะหมายถึง *ลูกบาศก์*

ถ้าวัตถุนั้นเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวด้าน ๑ หน่วย,

$$N(1) = 1$$



$$N\left(\frac{1}{2}\right) = 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

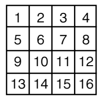


$$N\left(\frac{1}{4}\right) = 16 = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

$$N\left(\frac{1}{8}\right) = 2^6 = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}, \text{etc}$$

⋮ ⋮

$$\Rightarrow N\left(\frac{1}{2^k}\right) = 2^{2k} = \left(\frac{1}{2^k}\right)^{-2}$$



⋮

$$N(\ell) = \ell^{-2}$$

วิธีการสร้าง

ขั้นที่ ๑ ตัดช่วง [๐, ๑] ออกเป็น ๓ ส่วนเท่าๆ กัน แล้วดึงช่วงย่อยความยาว ๑/๓ ตรงกลางออก

ขั้นที่ ๒ ตัด ๒ ช่วงย่อยที่เหลือออกเป็น ๓ ส่วนเท่าๆ กัน แล้วดึงช่วงย่อยความยาว ๑/๓² ตรงกลางทั้ง ๒ ออก

⋮

ทำต่อไปซ้ำๆ ในทำนองเดียวกันนี้อย่างไม่รู้จบ. วัตถุที่ได้เรียกว่า triadic Cantor set.

วิธีนิยามมิติ D วิธีหนึ่งคือ :

– ให้ $N(\ell)$ เป็นจำนวน box (มิติ d) ซึ่งมีความยาวด้านเท่ากับ ℓ ที่สามารถปิดวัตถุนั้นได้มิด

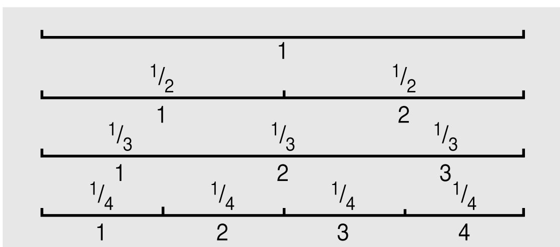
ตัวอย่างเช่น ถ้าวัตถุนั้นเป็นเส้นตรง ยาว ๑ หน่วย,

$$N(1) = 1$$

$$N\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$N\left(\frac{1}{3}\right) = 3,$$

$$N(\ell) = \ell^{-1}$$



– นิยามให้มิติของวัตถุนั้น คือ

$$D = \lim_{\ell \to 0} \frac{\ln N(\ell)}{\ln(1/\ell)}$$

ตัวอย่างเช่น

ถ้าวัตถุนั้นเป็นเส้นตรง

$$D = \lim_{\ell \to 0} \frac{\ln(\ell^{-1})}{\ln(\ell^{-1})} = 1$$

ถ้าวัตถุนั้นเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสความยาวด้าน ๑ หน่วย

$$D = \lim_{\ell \to 0} \frac{\ln(\ell^{-2})}{\ln(\ell^{-1})} = 2$$

ถ้าวัตถุนั้นเป็น Cantor set

$$N(1) = 1$$

$$N\left(\frac{1}{3}\right) = 2$$

$$N\left(\frac{1}{3^2}\right) = 4 = 2^2$$

$$N\left(\frac{1}{3^3}\right) = 8 = 2^3$$

$$\vdots$$

$$N\left(\frac{1}{3^k}\right) = 2^k$$

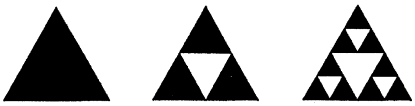
$$\therefore D = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(2^k)}{\ln(3^k)} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$\cong 0.6309$$

ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม Cantor set จึงเป็นสิ่งพร่องจำนวน.

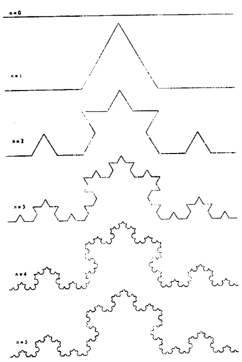
ตัวอย่างของวัตถุที่มีเรขาคณิตพร่องจำนวน

๑. Sierpinski gasket ดังในรูป



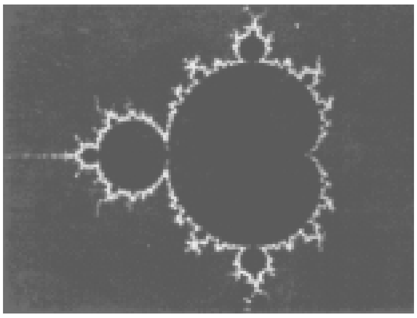
มีลักษณะคล้ายตัวเอง (self similar) และ $D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \cong 1.581$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม

๒. Triadic Koch Curve



$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \cong 1.2628$$

๓. Mandelbrot set



จากสมการ $z_{k+1} = z_k^2 - \mu$ เซตของค่าของ μ ซึ่ง z_k ไม่ลู่สู่ ∞ จากค่าเริ่มต้น $z_0 = 0$ มีขอบเขตเป็นโค้งพร่องจำนวน (fractal curve)

๔. Julia Set

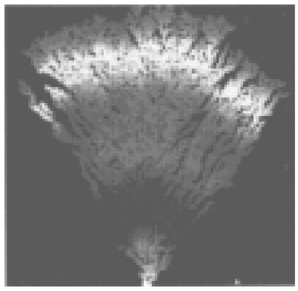
จากสมการ

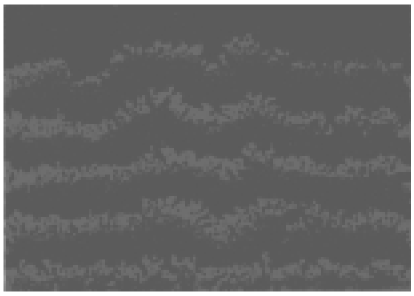
$$z' = f(z) = z^2 - \mu \qquad (*)$$

โดยที่ z และ μ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

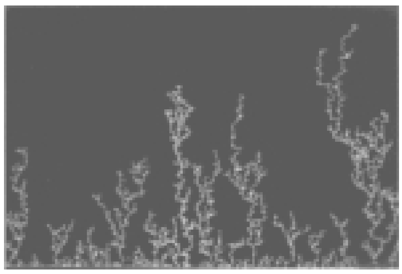
เซตของค่า z ซึ่งไม่แปรเปลี่ยน (invariant) ภายใต้การแปลง (*) สำหรับค่า μ ค่าใดค่าหนึ่งเป็นสิ่งพร่องจำนวน

ยังมีวัตถุในธรรมชาติอีกมากมายที่พบว่ามีลักษณะพร่องจำนวนดังในรูปต่างๆ ต่อไปนี้

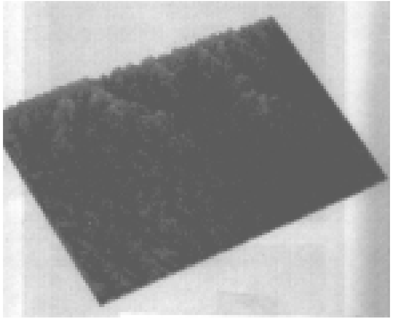




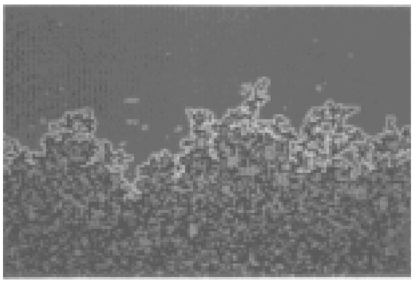
กลุ่มก้อนการรวมตัวของอนุภาคที่ตกลงในแนวดิ่ง เริ่มจากตัวล่อผลึก (seed) ที่จุดเดียว และจากตัวล่อผลึกตามแนวเส้นตรงด้านล่าง.



การตกตะกอนถ่วงน้ำหนักขนาดมหทรรศน์ (macroscopic) แสดงถึงการที่เกล็ดหิมะไหลลื่นลงตามแผ่นกระจกมารวมตัวกัน โดยยึดติดกับส่วนที่แตะกัน.

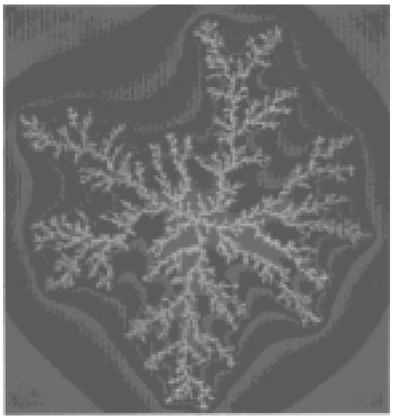


พื้นผิวขรุขระที่ได้จากแบบจำลองของลักษณะของบริเวณภูเขาที่ถูกน้ำชัดเซาะเป็นพื้นผิวพร่องจำนวนสัมพรรคตัวเอง (self affine fractal) แม่น้ำเป็นสิ่งพร่องจำนวนคล้ายตัวเอง (self similar fractal).

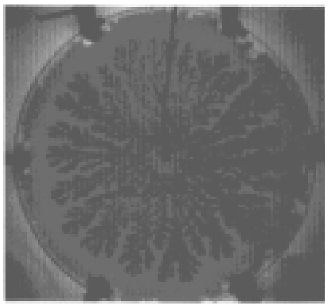


จุดเหลือง คือ แนวการแพร่ (diffusion front) ซึ่งก่อตัวขึ้น เมื่ออนุภาคแพร่จากแนวกำเนิดด้านล่างของภาพ.

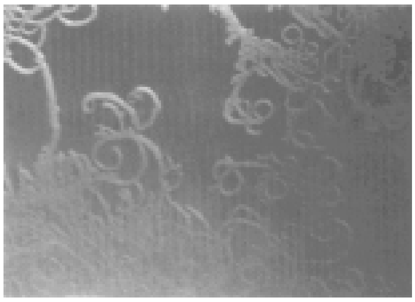
กลุ่มของอนุภาค ๕๐,๐๐๐ ชิ้น ซึ่งเกิดจากการปล่อยอนุภาคทีละชิ้นจากจุดนอกแลตทิซไกลมาก ซึ่งอนุภาคจะแพร่เป็นแนวเดินสุ่ม (random walk) จนมาติดกับกลุ่มที่ก่อตัวอยู่ที่จุดใดจุดหนึ่ง.

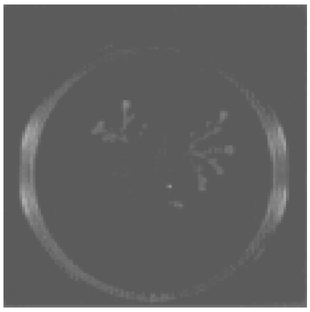


การกระจายความน่าจะเป็น (probability distribution) ของการพบอนุภาคที่แพร่มารอบๆกลุ่มก้อน (aggregate) สีเหลือง ซึ่งประกอบด้วยอนุภาค ๒๕,๐๐๐ ชิ้น.

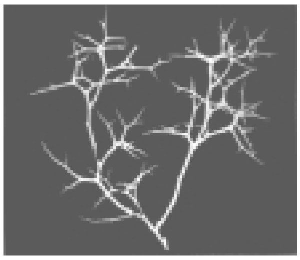


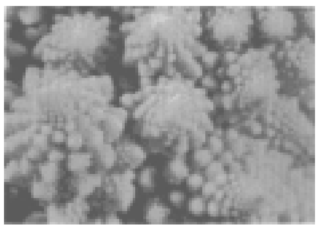
ส่วนพร่องจำนวนซึ่งเกิดจาก viscous fingering เมื่อของไหลที่หนืดน้อยกว่า (เขียว) ถูกฉีดเข้าในแผ่นของของเหลวที่หนืดมากกว่า (แดง) ซึ่งถูกกักอยู่ระหว่างแผ่นกระจก ๒ แผ่น.





การเติบโตของนิคมแบคทีเรียภายในบริเวณที่มีขอบเขตเป็นวงกลม.





โครงสร้างที่เป็นส่วนพร่องจำนวนของต้นไม้แห้ง และดอกกะหล่ำชนิดหนึ่ง.

เกล็ดหิมะ

สรุป

มีผู้สนใจศึกษาโครงสร้างที่มีเรขาคณิตพร่องจำนวนอีกมาก เนื่องจากเชื่อว่าความเข้าใจที่ลึกซึ้งของที่มาของสมบัติดังกล่าว น่าจะนำไปสู่ความเข้าใจเกี่ยวกับกลวิธานเชิงชีวภาพและเชิงกายภาพของโครงสร้างที่มีลักษณะเป็นเรขาคณิตพร่องจำนวนเหล่านี้ได้ดีขึ้น, รวมทั้งช่วยให้สามารถจัดการควบคุมปรากฏการณ์ที่เกี่ยวเนื่องกันด้วยสมบัติร่วมที่เรียกว่าเรขาคณิตพร่องจำนวนเหล่านี้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ จึงมีนักวิจัยทั่วโลกที่พยายามไขปัญหาอันลี้ลับที่นำสมบัติทางคณิตศาสตร์ไปใช้เป็นโครงสร้างของระบบต่าง ๆ ในธรรมชาติอย่างน่าประหลาดเป็นอย่างยิ่ง.

กิตติกรรมประกาศ

ภาพประกอบเรขาคณิตพร่องจำนวนในบทความนี้คัดลอกจากหนังสือเรื่อง Fractal Growth Phenomena ของ Tamás Vicsek[๒].

เอกสารประกอบการเรียบเรียง

๑. Mandelbrot BB. The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman; 1982.
๒. Vicsek T. Fractal growth phenomena. 2nd ed. Singapore: Word Scientific Publishing Co; 1992.
๓. สุธานิธิ์ ยุตะนันทน์, อุไร จิรมงคลการ, วชิรพงศ์ หวลบุตตา. ไม้ดอกแสนสวย. ไม้ดอกไม้ประดับ. กรุงเทพฯ: บริษัทอมรินทร์พริ้นติ้งแอนด์พับลิชชิ่ง; ๒๕๓๘.
๔. สุรินทร์ มัจฉิมชีพ, สมสุข มัจฉาชีพ. สารานุกรมพืชและสัตว์ เล่ม ๒. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แพร่พิทยา; ๒๕๓๓.
๕. Briggs J. Fractals: the patterns of chaos. New York: Touchstone Book; 1992.
๖. Burnie D, จิรนันท์ พิตรปรีชา (ผู้แปล). ไขปริศนาธรรมชาติ เล่ม ๑. กรุงเทพฯ: บริษัทซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน); ๒๕๓๙.
๗. Glass L, Mackey MC. From clocks to chaos. Princeton Univ Press; 1988.

Abstract **Fractal Geometry**
Yongwimol Lenaburi
Fellow, the Academy of Science, the Royal Institute, Thailand
Many structures or objects found in our surroundings possess special properties known as fractal geometry. The terminology arises from the discovery that these structures have fractal dimensions. In this article, only one definition of the dimension of a structure is given together with examples of objects having fractal dimensions, which may be found in nature and are of great interest.

Key word : **fractal geometry**